

Разработка системы автономной навигации беспилотных транспортных средств с помощью ультразвуковых локационных методов*

О.В. Руденко, А.С. Шуруп

Приведены результаты работ по акустическим локационным методам применительно к небольшим летательным аппаратам. Разработана экспериментальная модель с оригинальной системой обнаружения и идентификации препятствий, учитывающей особенности дифракции и отражения акустических волн. Развита методика активной локации, использующие тройную корреляцию и свойства корреляционной функции ЛЧМ-сигналов, отраженных от вращающегося винта. Создан прототип мобильного содара, реализующий новые способы активной локации. Разработаны методы расчета дифрагированного акустического поля, основанные на обобщении интеграла Зоммерфельда и метода перевала, а также использующие асимптотические формулы для двумерного интеграла Фурье. Изучено акустическое переходное излучение. Установлены новые спектральные признаки сигналов, отраженных от движущегося летательного аппарата, с учетом взаимодействия собственного излучения и зондирующего сигнала на нелинейности подвижной границы.

Ключевые слова: акустическая локация, канонические задачи дифракции, акустическое переходное излучение, эффект Доплера.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №19-29-06048).

Введение

Беспилотные летательные аппараты, в том числе транспортные (БТС), находят широкое применение для обеспечения жизнедеятельности. Появление дешевых моделей БТС привело к взрывному росту их использования при создании «умных городов». Требуется решить комплекс задач, связанных с использованием БТС для доставки грузов в пределах города и прилегающих территорий. Для безопасного перемещения БТС нужна система, предупреждающая столкновения с препятствиями. В ее основе лежит задача оперативного сопоставления карты местности и положения БТС на этой карте. В англоязычной литературе эта задача известна как Simultaneous localization and mapping (SLAM) [1].

Среди методов локализации БТС можно выделить радиолокационные, оптические и акустические [2]. Преимуществом акустических методов является их низкая стоимость [3] и достаточно высокая точность обнаружения. Эффективное сечение рассеяния электромагнитных волн неметаллическими аппаратами обычно мало, и акустические волны могут дать больше информации. Кроме того, звук слабо затухает в тумане и оптически мутных средах. К недостаткам акустических методов можно отнести небольшую дальность обнаружения в ультразвуковом диапазоне (как правило, до нескольких сотен метров), которая определяется затуханием, дифракцией, высокими уровнями шумов в исходных данных и чувстви-

тельностью к вариациям характеристик среды. Развитие акустических методов локации БТС является перспективным направлением [4]. В настоящей работе кратко описаны оригинальные методы ориентации БТС в городской среде с использованием акустических датчиков, новые подходы к выделению признаков БТС с винтом (как в эхо-сигналах, так и в собственном излучении). В основе приложений лежат результаты фундаментальных исследований в теории дифракции (на конусах и клиньях), переходного излучения, взаимодействия волн в пластинах и в воздухе, численных методов.

Излучение и отражение волн при учете подвижности границ

Известно, что при движении источника и/или приемника возникает доплеровский сдвиг частоты. Для акустического сигнала относительный сдвиг $\Delta\omega/\omega \sim u/c$ (ω – частота излу-



РУДЕНКО
Олег Владимирович
академик,
Московский
государственный
университет
им. М.В. Ломоносова



ШУРУП
Андрей Сергеевич
Московский государственный
университет
им. М.В. Ломоносова

ния, u – скорость перемещения объекта, c – скорость акустической волны) на пять порядков превышает сдвиг для электромагнитного сигнала, поскольку скорость звука во столько же раз меньше скорости света. Однако расчет формы и спектра сигнала при произвольном движении объекта – это трудная задача. Продвинуться удалось на основе общего подхода к анализу формирования сигналов движущимся объектом как к задаче об излучении и отражении волн при учете подвижности границ [5]. Сформулировано функциональное уравнение, определяющее модуляцию отраженного сигнала при известном движении источника. Удалось найти явное выражение для отраженного сигнала. Интересно, что характер его модуляции напоминает искажение нелинейной римановой волны. Это означает, что происходит значительная трансформация и уширение спектра по сравнению с отражением от неподвижного объекта. В простейшем случае, если объект совершает колебания с частотой Ω и сам облучается акустической волной на частоте ω_0 , в спектре отраженного сигнала появляются гармоники:

$$\frac{(1-u/c)\omega_0 \pm n\Omega}{1+u/c}, n=0, 1, 2, 3, \dots$$

Их амплитуды выражаются через функции Бесселя [5]. Они могут служить спектральным признаком для локации движущегося летательного аппарата и оценки его характеристик.

Подход позволил сформулировать обратную задачу нахождения закона движения источника по измеренному отраженному сигналу. Установлен закон перемещения рассеивателя, при котором отраженная волна отсутствует. Были рассмотрены движение источника с постоянным ускорением и его колебательный режим, а также облучение гармоническим сигналом и импульсом. В ряде случаев обратную задачу удалось решить аналитически [5], например, восстановить закон перемещения объекта по форме профиля зондирующей и отраженной волн.

Акустическое переходное излучение

При движении летательного аппарата в городской среде возможно наблюдение новых эффектов, среди которых следует выделить переходное излучение (ПИ). В электродинамике такое излучение возникает при пересечении зарядом границы раздела двух сред с разными показателями преломления [6]. Когда частица переходит из одной среды в другую, окружающее ее поле изменяется, порождая волну. В акустике ПИ изучено в меньшей степени и обсуждается реже, чем в оптике. Однако акустический эффект гораздо сильнее оптического. Его наблюдал (слышал) каждый пассажир поезда, движущегося по мосту с периодически расположенными фермами, или при поездке в автомобиле мимо череды колонн или других конструкций, создающих сильные неоднородности границ. Некоторые аналогии ПИ в акустике и электродинамике указаны в обзоре [7]. Полный расчет характеристик направленности и спектров акустического ПИ довольно сложен. В рамках настоящей работы для анализа основных закономерностей рассматривалось движение летательного аппарата мимо близко расположенного здания в условиях плотной городской застройки. Важно, что акустическое ПИ, в отличие от оптики, может иметь не только дипольный, но и монополярный характер [5] (рис. 1). Такой вид излучения возникает при пересечении летательным аппаратом границ зданий, иных неоднородностей границ, при движении экранопланов над неровной поверхностью, при переходе из одной среды в другую, отличающуюся значениями плотности и скорости звука. Полученные результаты формируют основу для более детального анализа акустического ПИ при решении задач акустической локации движущихся летательных аппаратов.

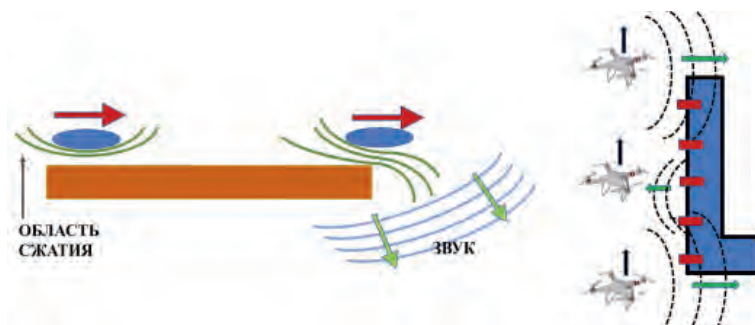


Рис. 1. Схема монополярного и дипольного переходных излучений.

Прототип летательного аппарата с акустическим позиционированием

Одной из основных целей исследования было создание системы ориентации БТС, основанной на принципах акустической локации. Акустические методы могут конкурировать с оптическими в ситуациях, когда видимость затруднена (например, в задымленных помещениях). Обычная импульсная акустическая локация хорошо известна и широко используется. В настоящей работе был построен прототип системы, исполь-

зующей локацию на основе последовательностей максимальной длины (М-последовательностей). Как известно, М-последовательность представляет собой квазишумовой сигнал, автокорреляционная функция которого близка к дельтообразной. Локатор формирует посылку в виде М-последовательности, принимает отраженный сигнал и вычисляет корреляцию с исходной посылкой. Локация такого типа обладает высокой помехоустойчивостью и позволяет строить импульсные отклики, содержащие информацию о препятствии. Потенциально такие отклики могут использоваться для классификации препятствий (стенка, угол, конус, другой летательный аппарат).

Используя эксперименты с М-последовательностями, мы создали прототип беспилотного летательного аппарата (БПЛА) на основе одноплатного компьютера, с возможностью подключения акустических датчиков (рис. 2). Это позволило создать прототип БПЛА с оригинальной акустической системой, позволяющей проводить акустические измерения и их корреляционную обработку непосредственно на летательном аппарате и, при необходимости, передавать результаты на пульт оператора в режиме реального времени. На первом этапе измерения проводились на нелетающем аппарате, закрепленном на штативе. После отработки методики проведены измерения сигнала с летающего БПЛА. Данная методика использована для измерения дифракционных откликов на рассеивателях различной формы.



Рис. 2. Пример дифракционного эксперимента с прототипом летательного аппарата.

Новые методы и результаты корреляционной обработки в задачах акустической локации

Важную роль в акустической локации играют активные методы, использующие облучение аппарата с последующей обработкой отраженных сигналов. Был разработан и прошел апробацию новый метод активной акустической локации летательных аппаратов с несущим винтом или тянущим/толкающим пропеллером. Метод заключается в облучении аппарата ЛЧМ акустическим сигналом в слышимом диапазоне, приеме отраженного сигнала и вычислении взаимной корреляцион-

ной функции. Обнаружено, что, помимо основного пика корреляционной функции, соответствующего прямому сигналу, присутствуют побочные максимумы, расположенные в области отрицательных временных задержек, что указывает на наличие у объекта вращающегося винта или лопастей [8]. Обнаружена связь между частотой вращения винта/лопастей, их количеством и положением побочных максимумов корреляционной функции. Частота вращения винта и количество лопастей влияют на амплитуду этих максимумов. Проведен модельный эксперимент, подтверждающий теоретические выводы (рис. 3). В итоге был предложен еще один информативный признак обнаружения вращающегося винта (дополнительные максимумы корреляционной функции), позволяющий проводить селекцию летательных объектов с винтом от других объектов, таких как птицы и городские постройки.

Для экспериментальной реализации развитых методов активной локации был разработан малогабаритный содар. Он представляет собой два рупора, расположенных соосно рядом друг с другом (рис. 3а). В основании одного рупора крепится излучатель, другого рупора – микрофон. Типичная корреляционная функция отклика и посылки показана на рис. 3б. Хорошо виден основной пик, расположенный в области положительных значений ct (c – скорость звука, t – время наблюдения), равных десяткам метров, а также побочные пики, расположенные в области отрицательных значений ct .

В качестве развития корреляционных методов предложено использование тройной корреляции при зондировании окружающей среды [9].

Этот метод отличается от обычного корреляционного измерения тем, что подынтегральное выражение содержит три различные функции (сигналы с разнесенных в пространстве источника и двух приемников). Это позволяет проводить сравнение локационного сигнала с двумя сигналами из разных точек пространства, тем самым не только выявлять движущиеся

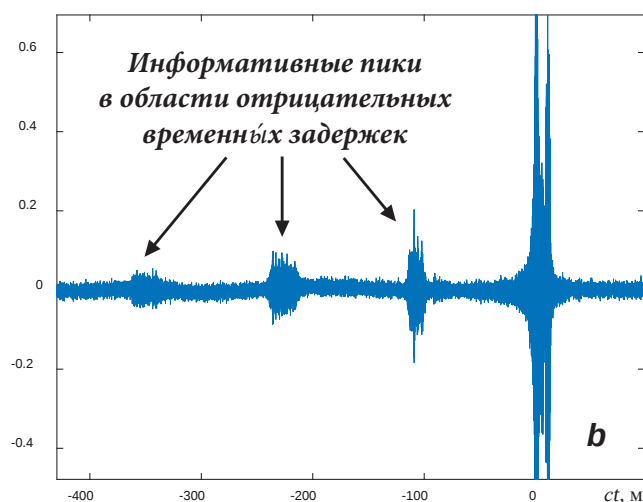
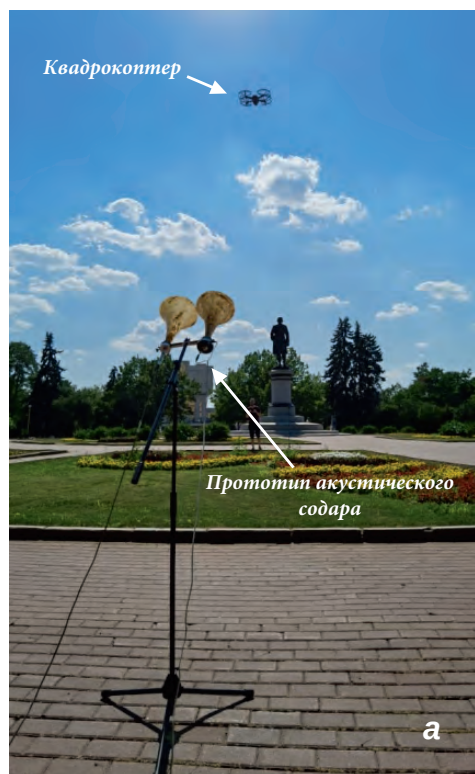


Рис. 3. Фотография эксперимента с прототипом акустического содара (а). Нормированная корреляционная функция излученного и отраженного от вращающегося винта ЛЧМ-сигнала (b) содержит дополнительные максимумы – новый информативный параметр.

объекты, но и оценивать траекторию их перемещения. Для этого анализируется двухпараметрическое множество исходных данных (относительных временных задержек), что и позволяет провести трассирование объекта. При этом используется антенна, состоящая из небольшого числа элементов. В результате численного моделирования и обработки экспериментальных данных показана возможность использования тройной корреляции (или кумулянта третьего порядка) для активной локации БТС в воздухе [9].

Для практической реализации предложен специальный квазишумовой сигнал с близкой к дельта-функции тройной корреляцией. Такой сигнал может быть полезным и для активного обнаружения БТС с вращающимся винтом методами, описанными выше. Предполагается, что использование тройной корреляции позволит построить значительную часть траектории объекта за счет отправки и приема одиночного волнового пакета с последующим анализом данных. Следует отметить, что метод тройной корреляции (а также его спектральный аналог – биспектр) известен и применяется

ся, например, в космологии, оптике, океанологии [10]. Однако в задачах активной акустической локации этот метод практически не используется. Концепция тройной корреляции ставит весьма сложную математическую задачу построения аналога М-последовательности, а именно сигнала, обладающего тройной корреляцией в виде точной дельта-функции.

Аналитическое и экспериментальное исследование дифракции на модельных объектах

В рамках проекта решались фундаментальные задачи дифракции акустических волн, связанные с локацией препятствий. Их форма может содержать особенности – например, конусные заострения и острые кромки. В частности, развиты новые экспериментальные методы, основанные на М-последовательности [11]. Построена модифицированная методика, позволяющая использовать узкополосные излучатели и измерять частотный отклик в заданном диапазоне с высоким отношением сигнал/шум. В качестве зондирующего использовался гармонический сигнал, фазоманипулированный М-последовательностью. Взаимно-корреляционная функция излучаемого сигнала и сигнала, записанного микрофоном вблизи поверхности рассеивателя (рис. 4а), позволяет оценить отклик системы. Было проведено сравнение теории с экспериментом (рис. 4б) [11]. Теоретический анализ проводился в рамках метода параболического уравнения. Задача дифракции на жестком конусе была сведена к граничному интегральному уравнению Вольтерра, которое удалось решить с помощью преобразования Фурье.

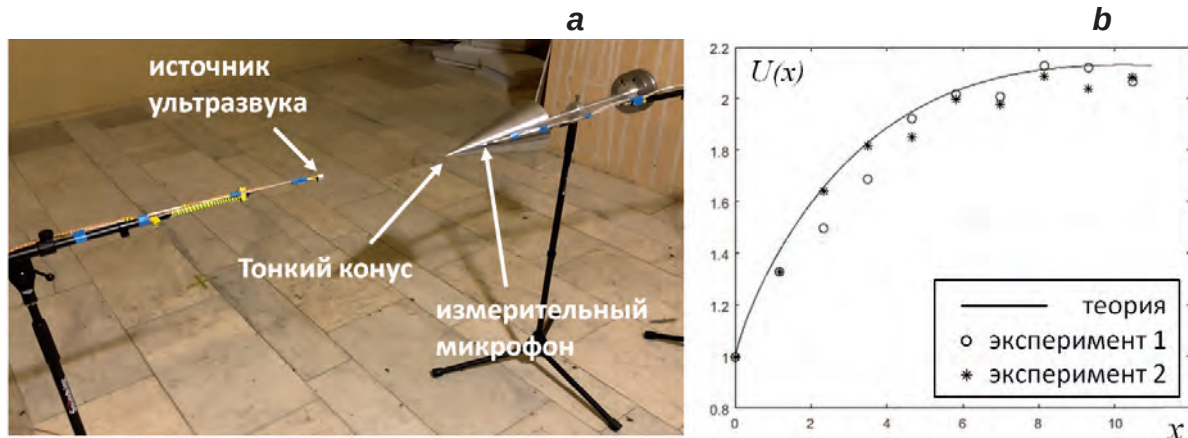


Рис. 4. Фотография эксперимента по измерению поля $U(x)$, дифрагированного на тонком конусе (а), как функции аксиальной координаты точки наблюдения x ; сравнение результатов аналитических оценок и экспериментальных данных (б) [11].

Решены канонические задачи дифракции с использованием новых математических методов в области многомерного комплексного анализа. Центральное место занимает представление поля в виде интеграла по плоским волнам. Волновое поле $u(x)$ записывается как

$$u(x) = \int_{\Gamma} A(p)W(x;p)\Psi(p), \quad (1)$$

где x – координаты в пространстве; p – точка на дисперсионной диаграмме H (многообразии комплексной коразмерности 1 в спектральном пространстве); $W(x;p)$ – плоская волна; $A(p)$ – спектральная функция на дисперсионной диаграмме; $\Psi(p)$ – дифференциальная форма на H ; Γ – гомотопия соответствующей размерности на H .

Как известно, в простейшем случае уравнения Гельмгольца на плоскости дисперсионная диаграмма H топологически представляет собой бесконечный цилиндр, точка p параметризована углом распространения волны θ , форма $\Psi = d\theta$ есть дифференциал угловой переменной:

$$W(x_1, x_2; \theta) = \exp\{ik(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)\}. \quad (2)$$

В зависимости от Γ интеграл (1) с учетом (2) представляет собой либо представление для функции Грина, либо интеграл Зоммерфельда. Аналитичность многообразия H , функции A и формы Ψ приводит к возможности деформации контура интегрирования Γ . Данное интегральное представление использовано для модельных дифракционных задач на дискретных сетках [12–14]. Эти задачи важны, поскольку имеют непосредственное отношение к численным методам теории волн. Для этих задач многообразие H топологически представляет собой тор. Различные образующие этого тора, взятые как контур Γ , порождают интеграл для функций Грина и интеграл Зоммерфельда.

Используя предложенный метод впервые удалось решить задачу дифракции на прямом угле на квадратной сетке. Для этого было построено поле мероморфных функций на соответствующих многолистных накрытиях дисперсионной диаграммы H . После этого спектральная функция A находилась по своим известным вычетам.

Развит подход к построению асимптотических оценок многомерных интегралов Фурье [15, 16]:

$$u(x_1, x_2) = \iint_{\Gamma} A(\xi_1, \xi_2) \exp\{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\} d\xi_1 \wedge d\xi_2, \quad (3)$$

где A имеет полюса и множества ветвления, представляющие собой аналитические множества комплексной коразмерности 1. Поверхность интегрирования Γ в (3) почти всюду близка к действительной плоскости и правильно обходит особенности подынтегрального выражения. Показано, что при больших $|\xi|$ оценка интеграла следует из принципа локальности; такая оценка представляет собой сумму членов, вычисляемых в окрестностях специальных точек функции A . Эти точки – пересечения компонент особенностей, а также точки стационарной фазы на особенностях. Соответствующие оценки получены для всех типов таких точек [15]. Данные оценки были применены к задаче о возбуждении акустической волны изгибной волной в тонкой упругой пластине [16]. Была вычислена амплитуда импульса, возникающего на частоте фазового синхронизма упругой и акустической волн. Амплитуда этого импульса, импульсные отклики сигналов, дифрагированных на препятствиях различной формы, а также другие признаки, выявленные при аналитическом решении задач дифракции и при экспериментальном измерении дифрагированных полей, могут служить информативными параметрами как в задачах локализации летательных аппаратов, так и для их ориентации в условиях городской застройки.

Заключение

Развитие строгих математических методов решения дифракционных задач и аналитическое описание сигналов движущихся объектов совместно с практическими подходами акустической локации определили междисциплинарный характер исследования. Такой подход позволил получить результаты, формирующие задел для решения широкого круга задач дистанционной акустической

локации беспилотных транспортных средств как в активном режиме (при использовании высоких частот порядка десятков кГц), так и в более низкочастотном пассивном режиме, в том числе, в условиях городской застройки. Перспективным является развитие предложенных методик для локации подводных аппаратов, а также для классификации воздушных сверхзвуковых источников с учетом нелинейных эффектов [17]. Разумеется, гидроакустические приложения требуют учета специфических свойств водной среды и используемой аппаратуры.

Авторы выражают глубокую благодарность А.В. Шанину, Н.С. Виноградову, А.И. Королькову и В.А. Гусеву за их вклад в результаты настоящей работы.

Литература

1. T. Bailey H., Durrant-Whyte
IEEE Robot. Automat. Magaz., 2006, **13**(3), 108.
DOI: 10.1109/MRA.2006.1678144.
2. J. Farlik, M. Kratky, J. Casar, V. Stary
Sensors, 2019, **19**(7), 1517. DOI: 10.3390/s19071517.
3. A. Sedunov, D. Haddad, H. Salloum, A. Sutin, N. Sedunov, A. Yakubovskiy
B Proc. 2019 IEEE International Symposium on Technologies for Homeland Security (HST), USA, Woburn, 2019, pp. 1–7.
DOI: 10.1109/HST47167.2019.9032916.
4. Z. Shi, X. Chang, C. Yang, Z. Wu and J. Wu
IEEE Transact. Vehic. Technol., 2020, **69**(3), 2731.
DOI: 10.1109/TVT.2020.2964110.
5. О.В. Руденко, В.А. Гусев
Акустический журнал, 2020, **66**(6), 599.
DOI: 10.31857/S032079192006009X.
6. В.Л. Гинзбург, И.М. Франк
ЖЭТФ, 1946, **16**(1), 15.
7. В.И. Павлов, А.И. Сухоруков
УФН, 1985, **147**(1), 84.
8. А.И. Корольков, К.С. Князева, А.С. Шуруп
Акустический журнал, 2020, **66**(6), 681.
DOI: 10.31857/S0320791920060052.
9. А.И. Корольков, К.С. Князева, А.С. Шуруп
Известия РАН. Сер. физическая, 2022, **86**(1), 105.
DOI: 10.31857/S0367676522010173.
10. A.W. Lohmann, B. Wirtzner
B Proc. IEEE, 1984, **72**(7), 889. DOI: 10.1109/PROC.1984.12946.
11. A.V. Shanin, A.I. Korolkov, A.Y. Laptev
B Abstr. Int. Conf. Days on Diffraction 2022 (RF, St. Petersburg, May 30 – June 3, 2022), RF, Saint Petersburg, PDMI Publ., 2022, p. 54.
12. A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Wave Motion, 2020, **97**, 102606. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2020.102606.
13. A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Quart. Appl. Math., 2022, **80**(2), 277. DOI: 10.1090/qam/1612.
14. О.И. Макаров, А.В. Шанин, А.И. Корольков
Акустический журнал, 2023, **69**(2), 129.
DOI: 10.31857/S0320791923600105.
15. A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Quart. J. Mechan. Appl. Math., 2023, **76**(1), 1.
DOI: 10.1093/qjmam/hbac017.
16. M.A. Mironov, A.V. Shanin, A.I. Korolkov, K.S. Kniazeva
Proc. Roy. Soc. A, 2021, **477**, 20210530. DOI: 10.1098/rspa.2021.0530.
17. О.В. Руденко, Ю.Н. Маков
Акустический журнал, 2021, **67**(1), 3.
DOI: 10.31857/S0320791921010032.

English

Development of Autonomous Navigation System for Remote-Control Vehicles using Ultrasound Location Techniques*

Oleg V. Rudenko

Academician,

Lomonosov Moscow State University

1–2 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia

rudenko@acs366.phys.msu.ru

Andrei S. Shurup

Lomonosov Moscow State University

1–2 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia

shurup@physics.msu.ru

Abstract

Results of works on acoustic location methods applied to small airborne vehicles are presented. An experimental model has been developed with an original acoustic system for detecting and identifying obstacles based on analysis of diffraction and reflection of acoustic waves. Methods for active acoustic location have been developed, using triple correlation and properties of correlation function of chirp signals reflected from a rotating

propeller. A prototype of mobile acoustic sodar has been created that implements the new methods of active location. Original methods for solving acoustic diffraction problems, based on a generalization of Sommerfeld integral and saddle-point method, as well as asymptotic formulas for two-dimensional Fourier integral have been regarded. Acoustic transition radiation has been studied. New spectral peculiarities of signals reflected from a moving airborne vehicle are established, taking into account interaction of self-radiation and probing signal on nonlinearity of moving boundary.

Keywords: acoustic location, canonical diffraction problems, acoustic transition radiation, Doppler effect.

**The work was financially supported by RFBR (project 19-29-06048).*

Images & Tables

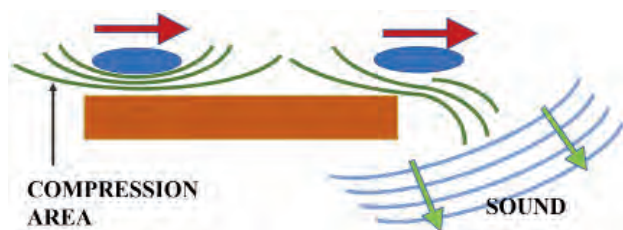


Fig. 1. Scheme of monopole and dipole transition radiation.

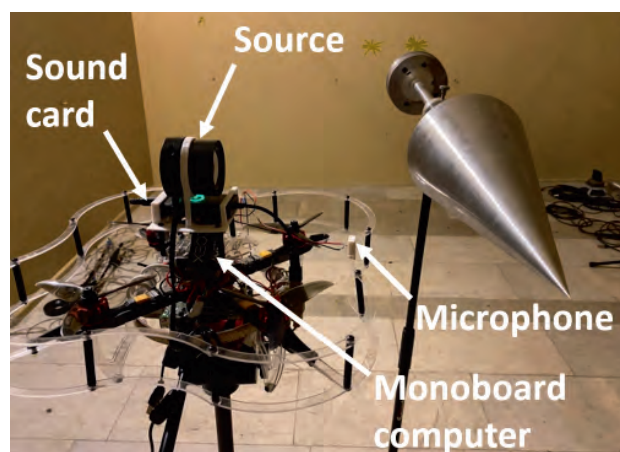


Fig. 2. An example of diffraction experiment with prototype of airborne vehicles.

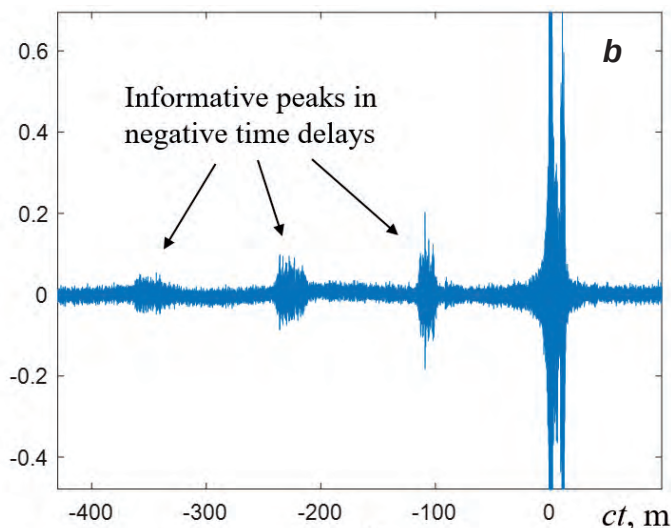
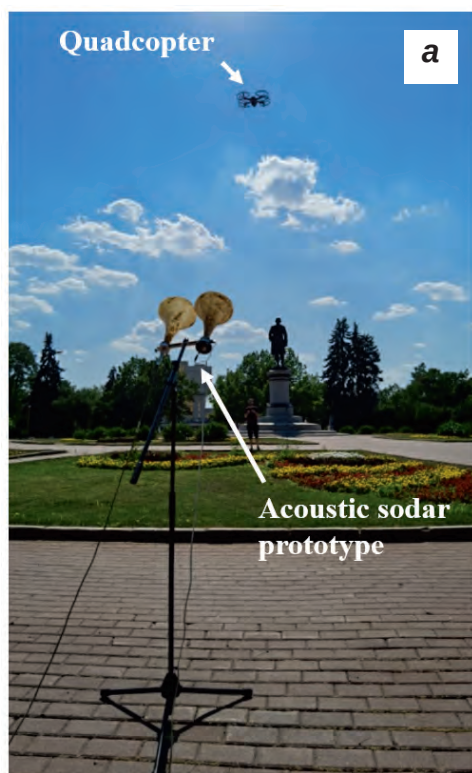


Fig. 3. Photo of experiment with the developed acoustic sodar prototype (a). The correlation function of chirp signal emitted and reflected from the rotating screw (b) contains additional maxima – a new informative parameter.

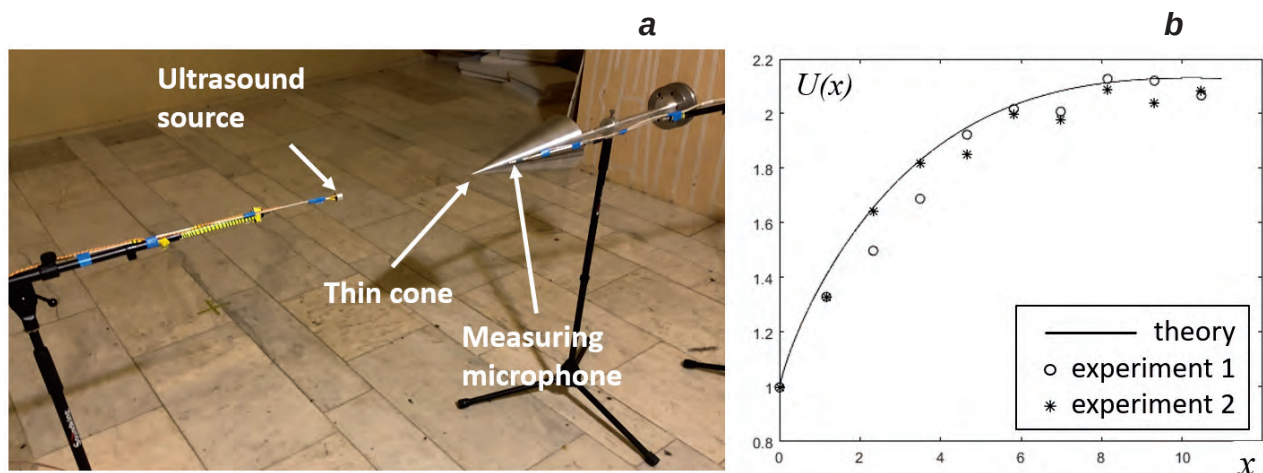


Fig. 4. Photo of experiment for measuring field $U(x)$ diffracted by a thin cone (a) as a function of axial coordinate of observation point x ; comparison of results of analytical estimates and experimental data (b) [11].

References

1. T. Bailey H., Durrant-Whyte
IEEE Robot. Automat. Magaz., 2006, **13**(3), 108.
DOI: 10.1109/MRA.2006.1678144.
2. J. Farlik, M. Kratky, J. Casar, V. Stary
Sensors, 2019, **19**(7), 1517. DOI: 10.3390/s19071517.
3. A. Sedunov, D. Haddad, H. Salloum, A. Sutin, N. Sedunov, A. Yakubovskiy
In *Proc. 2019 IEEE International Symposium on Technologies for Homeland Security (HST)*, USA, Woburn, 2019, pp. 1–7.
DOI: 10.1109/HST47167.2019.9032916.
4. Z. Shi, X. Chang, C. Yang, Z. Wu and J. Wu
IEEE Transact. Vehic. Technol., 2020, **69**(3), 2731.
DOI: 10.1109/TVT.2020.2964110.
5. O.V. Rudenko, V.A. Gusev
Acoust. Phys., 2020, **66**(6), 587.
DOI: 10.1134/S1063771020060093.
6. V.L. Ginzburg, I.M. Frank
Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki [Russ. J. Exp. Theor. Phys.], 1946, **16**(1), 15 (in Russian).
7. V.I. Pavlov, A.I. Sukhorukov
Uspekhi fizicheskikh nauk [Sov. Advances in Physical Sciences], 1985, **28**, 784 (in Russian).
8. A.I. Korolkov, K.S. Knyazeva, A.S. Shurup
Acoust. Phys., 2020, **66**(6), 676.
DOI: 10.1134/S1063771020060056.
9. A.I. Korolkov, K.S. Knyazeva, A.S. Shurup
Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2022, **86**(1), 70.
DOI: 10.3103/s1062873822010154.
10. A.W. Lohmann, B. Wirtzner
In *Proc. IEEE*, 1984, **72**(7), 889. DOI: 10.1109/PROC.1984.12946.
11. A.V. Shanin, A.I. Korolkov, A.Y. Laptev
In *Abstr. Int. Conf. Days on Diffraction 2022 (RF, St. Petersburg, May 30 – June 3, 2022)*, RF, Saint Petersburg, PDMI Publ., 2022, p. 54.
12. A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Wave Motion, 2020, **97**, 102606.
DOI: 10.1016/j.wavemoti.2020.102606.
13. A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Quart. Appl. Math., 2022, **80**(2), 277. DOI: 10.1090/qam/1612.
14. O.I. Makarov, A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Acoust. Phys., 2023, **69**(2), 143.
DOI: 10.1134/S1063771023600080.
15. A.V. Shanin, A.I. Korolkov
Quart. J. Mechan. Appl. Math., 2023, **76**(1), 1.
DOI: 10.1093/qjmam/hbac017.
16. M.A. Mironov, A.V. Shanin, A.I. Korolkov, K.S. Kniazeva
Proc. Roy. Soc. A, 2021, **477**, 20210530.
DOI: 10.1098/rspa.2021.0530.
17. O.V. Rudenko, Yu.N. Makov
Acoust. Phys., 2021, **67**(1), 1. DOI: 10.1134/S1063771021010036.